**Задачи для подготовки к экзамену и контрольной работе по теме №3**

**«Линейные операторы». (2 семестр)**

3.1. В базисе линейный оператор *А* имеет матрицу . Найти его матрицу в базисе .

**Решение**:

Матрица данного линейного оператора имеет вид:

,

матрица перехода от базиса к базису имеет вид:

.

Следовательно, матрица данного линейного оператора в базисе имеет вид:

3.2. В пространстве *V*3 линейный оператор *А* – проекция на ось *OY*. Найти матрицу оператора *А* в базисе . Найти образ вектора . Найти ядро и образ оператора *А*. Существует ли обратный оператор?

**Решение**:

Проекция на ось *OY* в пространстве V3 переводит точку с координатами (*a*;*b*;*c*) в точку с координатами (0;*b*;0), т.е. матрица данного оператора имеет вид:

Находим образ данного вектора:

Находим ядро данного оператора:

Для получения базиса образа данного линейного оператора находим:

Полученный вектор может быть выбран в качестве базиса образа данного оператора, т.е. .

Данный оператор имеет ненулевое ядро, следовательно, он не имеет обратного.

3.3. В пространстве *V*3 линейный оператор *А* – зеркальное отражение относительно плоскости *YOZ*. Найти матрицу оператора *А* в базисе . Найти образ вектора . Найти ядро и образ оператора *А*. Существует ли обратный оператор? Если да, то описать его действие.

**Решение**:

Зеркальное отражение относительно плоскости *YOZ* в пространстве *V*3 переводит точку с координатами (*a*;*b*;*c*) в точку с координатами (-*a*;*b*;*c*), т.е. матрица данного оператора имеет вид:

Находим образ данного вектора:

Находим ядро данного оператора: det*A* = -1 ≠1, следовательно, Ker*A*=0, Im*A*= *V*3.

Поскольку данный оператор имеет нулевое ядро, он обратим, т.е. имеет обратный оператор *A*-1. В пространстве *V*3 оператор *А*-1 = *А*, т.е совпадает с исходным оператором.

3.4. Пусть *А* – матрица линейного оператора из задачи 3.3. Найти *Аn*. Объяснить геометрический смысл полученного результата.

**Решение**:

Матрица линейного оператора из задачи 3.3 имеет вид:

и тогда

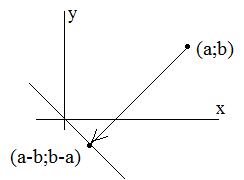
При четном *n* *Аn* = *E*, поскольку четное число отражений соответствует тождественному оператору *Е*, не меняющему вектора.

При нечетном *n* *Аn* = *А*, поскольку нечетное число отражений дает тот же результат, что и единственное отражение.

3.5. Линейный оператор *А* – проекция на ось . Найти матрицу оператора *А* в базисе . Найти ядро и образ оператора *А*. Существует ли обратный оператор?

**Решение**:

Проекция на ось переводит точку с координатами (*a*;*b*) в точку с координатами (*a-b*;*b-a*):



т.е. матрица данного оператора имеет вид:

Находим ядро данного оператора:

Для получения базиса образа данного линейного оператора находим:

Полученный вектор может быть выбран в качестве базиса образа данного оператора, т.е. .

Данный оператор имеет ненулевое ядро, следовательно, он не имеет обратного.

3.6. Линейный оператор *А* – поворот на плоскости вокруг начала координат на угол по часовой стрелке. Найти матрицу оператора *А* в базисе и образ вектора . Найти ядро и образ оператора *А*. Существует ли обратный оператор? Если да, то описать его действие.

**Решение**:

В пространстве *V*2 оператор с матрицей – оператор поворота плоскости вокруг начала координат на угол α *против* часовой стрелки. Тогда данный оператор имеет матрицу

Находим образ данного вектора:

Находим ядро данного оператора: det*A* = 1 ≠1, следовательно, Ker*A*=0, Im*A*= *V*2.

Поскольку данный оператор имеет нулевое ядро, он обратим, т.е. имеет обратный оператор *A*-1. В пространстве *V*2 оператор *А*-1 – поворот на угол вокруг начала координат *против* часовой стрелки.

3.7. Найти

**Решение**:

В пространстве *V*2 оператор с матрицей – оператор поворота плоскости вокруг начала координат на угол α против часовой стрелки. Тогда оператор - *n*-кратное повторение оператора *А* – соответствует повороту плоскости вокруг начала координат на угол *n*α и такой оператор имеет матрицу

Отсюда получаем:

3.8. В пространстве *V*3 оператор *А* – поворот на угол вокруг оси *OY* по часовой стрелке. Найти матрицу оператора *А* в базисе . Найти образ вектора . Найти ядро и образ оператора *А*. Существует ли обратный оператор? Если да, то описать его действие.

**Решение**:

Матрица данного оператора в базисе имеет вид:

Находим образ вектора :

Находим ядро данного оператора: det*A* = 1 ≠1, следовательно, Ker*A*=0, Im*A*= *V*3.

Поскольку данный оператор имеет нулевое ядро, он обратим, т.е. имеет обратный оператор *A*-1. В пространстве *V*3 оператор *А*-1 – поворот на угол вокруг оси *OY* *против* часовой стрелки.

3.9. В пространстве *V*3 оператор действует по правилу где . Показать линейность оператора, найти его матрицу в каноническом базисе. Найти ядро и образ оператора. Существует ли обратный оператор?

**Решение**:

Проверяем линейность данного оператора:

Свойства линейности выполнены – оператор линеен.

Если , то

т.е. матрица данного оператора имеет вид:

Находим ядро данного оператора:

Для получения базиса образа данного линейного оператора находим:

Полученный вектор (или любой коллинеарный ему) может быть выбран в качестве базиса образа данного оператора, т.е. .

Данный оператор имеет ненулевое ядро, следовательно, он не имеет обратного.

3.10. В пространстве *V*3 оператор действует по правилу .

Показать линейность оператора, найти его матрицу в каноническом базисе. Найти ядро и образ оператора. Существует ли обратный оператор?

**Решение**:

Проверяем линейность данного оператора:

Свойства линейности выполнены – оператор линеен.

Если , то

т.е. матрица оператора в каноническом базисе имеет вид:

Находим ядро данного оператора:

Для получения базиса образа данного линейного оператора находим:

Полученные векторы линейно независимы и могут быть выбраны в качестве базиса образа данного оператора, т.е. .

Данный оператор имеет ненулевое ядро, следовательно, он не имеет обратного.

3.11. В пространстве *V*3 оператор действует по правилу .

Показать линейность оператора, найти его матрицу в каноническом базисе и в базисе . Сделать проверку с помощью матрицы перехода.

**Решение**:

Проверяем линейность данного оператора:

Свойства линейности выполнены – оператор линеен.

Если , то

т.е. матрица оператора в каноническом базисе имеет вид:

Матрица перехода от канонического базиса к базису имеет вид:

следовательно, матрица данного оператора в базисе *S* имеет вид:

3.12. В каноническом базисе пространства *R*3 операторы *А* и *В* действуют по правилу ,

. Показать линейность операторов *А* и *В*. Как действует в этом базисе оператор ?

**Решение**:

Линейность операторов следует из линейности арифметических операций сложения и умножения на число, например, для оператора *А*:

Матрицы операторов *А* и *В* имеют вид:

,

поэтому оператор будет иметь в том же базисе матрицу

т.е. будет действовать по правилу

3.13. В каноническом базисе пространства *R*3 операторы *А* и *В* действуют по правилу ,

. Показать линейность операторов *А* и *В*. Как действует в этом базисе оператор ?

**Решение**:

Линейность операторов следует из линейности арифметических операций сложения и умножения на число, например, для оператора *А*:

Матрицы операторов *А* и *В* имеют вид:

,

поэтому оператор будет иметь в том же базисе матрицу

т.е. будет действовать по правилу

3.14. В каноническом базисе пространства *R*3 оператор *А* действует по правилу . Является ли оператор *А* невырожденным? Если да, то найти явный вид обратного оператора.

**Решение**:

Матрица данного оператора имеет вид:

Поскольку det*A*=2≠0,k то данный оператор – невырожденный и имеет обратный. Матрица обратного оператора имеет вид:

т.е. обратный оператор действует по правилу:

3.15. В каноническом базисе пространства *R*4 оператор *А* действует по правилу . Показать линейность оператора. Обратим ли оператор? Найти ядро и образ оператора.

**Решение**:

Линейность оператора следует из линейности арифметических операций сложения и умножения на число, например::

Матрица данного оператора имеет вид:

Находим ядро данного оператора:

Для получения базиса образа данного линейного оператора находим:

Полученные векторы линейно независимы:

и могут быть выбраны в качестве базиса образа данного оператора, т.е.

Данный оператор имеет ненулевое ядро, следовательно, он необратим.

3.16. Оператор *А* действует на матрицы второго порядка по правилу , где . Показать, что *А* – линейный оператор. Составить его матрицу в каноническом базисе. Найти ядро и образ оператора. Существует ли обратный оператор?

**Решение**:

Линейность оператора следует из линейности матричных операций умножения на скаляр, транспонирования и умножения на матрицу.

Если в каноническом базисе пространства *М*22

то

т.е. матрица данного оператора в каноническом базисе имеет вид:

Находим ядро данного оператора:

Для получения базиса образа данного линейного оператора находим:

Полученные векторы линейно независимы:

и могут быть выбраны в качестве базиса образа данного оператора, т.е.

Данный оператор имеет ненулевое ядро, следовательно, он необратим.

3.17. Оператор *А* действует на матрицы второго порядка по правилу , где . Показать, что *А* – линейный оператор. Составить его матрицу в каноническом базисе. Найти ядро и образ оператора. Существует ли обратный оператор?

**Решение**:

Линейность оператора следует из линейности матричных операций умножения на скаляр, транспонирования и умножения на матрицу.

Если в каноническом базисе пространства *М*22

то

т.е. матрица данного оператора в каноническом базисе имеет вид:

Поскольку det*A*=-34≠0, то Ker*A*=0, Im*A*=M22.

Данный оператор имеет нулевое ядро, следовательно, он обратим.

3.18. В пространстве *Р*2 многочленов степени не выше 2 оператор *А* действует по правилу . Показать линейность оператора. Найти его матрицу в каноническом базисе. Найти образ многочлена . Найти ядро и образ оператора. Существует ли обратный оператор?

**Решение**:

Проверяем линейность оператора:

Свойства линейности выполнены – оператор линеен.

Если в базисе пространства P2

то

т.е. матрица данного оператора в базисе имеет вид:

Для данного многочлена получаем:

Находим ядро оператора:

Образ оператора находим как дополнение ядра до всего пространства *L*, для этого выбираем базисные векторы с нулями в тех координатах, которые отличны от нуля в уже выбранном векторе (1;0;0): .

Данный оператор имеет ненулевое ядро, следовательно, он необратим.

3.19. В пространстве Р3 многочленов степени не выше 3 оператор *А* действует по правилу . Показать линейность оператора. Найти его матрицу в каноническом базисе. Найти ядро и образ оператора. Существует ли обратный оператор?

**Решение**:

Проверяем линейность оператора:

Свойства линейности выполнены – оператор линеен.

Если в базисе пространства P3

то

т.е. матрица данного оператора в базисе имеет вид:

Находим ядро оператора:

Образ оператора находим как дополнение ядра до всего пространства *L*, для этого выбираем базисные векторы с нулями в тех координатах, которые отличны от нуля в уже выбранном векторе (0;0;0;1): .

Данный оператор имеет ненулевое ядро, следовательно, он необратим.

3.20. В пространстве Р2 многочленов степени не выше 2 оператор А действует по правилу . Показать линейность оператора. Найти его матрицу в каноническом базисе и в базисе .

**Решение**:

Проверяем линейность оператора:

Свойства линейности выполнены – оператор линеен.

Если в базисе пространства P2

то

т.е. матрица данного оператора в каноническом базисе имеет вид:

Матрица перехода от базиса к базису имеет вид:

следовательно, матрица данного оператора в базисе *S* имеет вид:

3.21. Показать, что оператор *А*, действующий на функции *f*(*t*) по правилу , является линейным оператором в пространстве функций . Найти матрицу оператора в каком-нибудь базисе пространства. Обратим ли оператор? Найти ядро и образ оператора.

**Решение**:

Проверяем линейность оператора:

Свойства линейности выполнены – оператор линеен.

Если в базисе пространства *L*

то

т.е. матрица данного оператора в базисе имеет вид:

При этом det*A*=0, следовательно, данный оператор необратим.

Находим ядро оператора:

Образ оператора находим как дополнение ядра до всего пространства *L*, для этого выбираем базисные векторы с нулями в тех координатах, которые отличны от нуля в уже выбранном векторе (-1;1;0):

3.22. Показать, что оператор дифференцирования является линейным оператором в пространстве функций . Найти матрицу оператора в каком-нибудь базисе пространства. Существует ли обратный оператор? Найти ядро и образ оператора.

**Решение**:

Если то

т.е. и матрица оператора в базисе имеет вид:

Поскольку det*A*=0, то данный оператор не имеет обратного.

Находим ядро данного оператора:

т.е. Ker*A* = *L*{(0;0;1)} =

Отсюда получаем образ данного оператора как дополнения ядра до полного пространства *L*, для этого выбираем базисные векторы с нулями в тех координатах, которые отличны от нуля в уже выбранном векторе (0;0;1):

Im*A* = *L*{(1;0;0).(0;1;0)} =

3.23. Показать, что оператор сдвига является линейным оператором в пространстве функций . Найти матрицу оператора в каком-нибудь базисе пространства. Существует ли обратный оператор? Найти ядро и образ оператора.

**Решение**:

Данный оператор линеен, поскольку выполнены свойства

Если , то

т.е. и матрица оператора в базисе имеет вид:

Поскольку det*A*≠0, то данный оператор имеет обратный.

Находим ядро данного оператора:

т.е. Ker*A* = 0 и поэтому Im*A* = *L*.

3.24. Линейный оператор *А* в пространстве *V*3 имеет в базисе матрицу . Найти собственные значения и собственные векторы оператора *А*, показать, что это оператор простого типа.

**Решение**:

Матрица линейного оператора из задачи 3.24 в базисе имеет вид:

Находим собственные значения и собственные векторы матрицы:

Для

Для

Т.е. собственному значению соответствуют два собственных вектора собственному значению - один собственный вектор .

По определению, линейный оператор называется оператором простого типа (или простым оператором), если из собственных векторов этого оператора можно составить базис линейного пространства. Собственные векторы данного оператора образуют базис пространства *V*3, следовательно, это оператор простого типа.

3.25. В пространстве *V*3 оператор линейный оператор *А* – зеркальное отражение относительно плоскости *YOZ*. Найти собственные значения и собственные векторы оператора *А*.

**Решение**:

Зеркальное отражение относительно плоскости *YOZ* в пространстве V3 переводит точку с координатами (*a*;*b*;*c*) в точку с координатами (-*a*;*b*;*c*), т.е. матрица данного оператора имеет вид:

Находим собственные значения и собственные векторы матрицы оператора:

Для

Для

Получаем два собственных значения , первому соответствует один собственный вектор , второму - два собственных вектора: .

3.26. В пространстве *V*3 оператор линейный оператор *А* – проекция на ось *OY*. Найти собственные значения и собственные векторы оператора *А*.

**Решение**:

Проекция на ось *OY* в пространстве *V*3 переводит точку с координатами (*a*;*b*;*c*) в точку с координатами (0;*b*;0), т.е. матрица данного оператора имеет вид:

Находим собственные значения и собственные векторы матрицы оператора:

Для

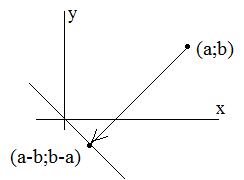
Для

Получаем два собственных значения , первому соответствуют два собственных вектора: , второму – один собственный вектор .

3.27. Линейный оператор *А* – проекция на ось . Найти собственные значения и собственные векторы оператора *А*.

**Решение**:

Проекция на ось переводит точку с координатами (*a*;*b*) в точку с координатами (*a*-*b*;*b*-*a*):



т.е. матрица данного оператора имеет вид:

Находим собственные значения и собственные векторы матрицы оператора:

Для

Получаем единственное собственное значение , которому соответствует один собственный вектор: .

3.28. В пространстве *V*3 оператор действует по правилу , где . Найти собственные значения и собственные векторы оператора *А*.

**Решение**:

Если , то

т.е. матрица данного оператора имеет вид:

Находим собственные значения и собственные векторы матрицы оператора:

Для

Для

Получаем два собственных значения , первому соответствуют два собственных вектора: , второму – один собственный вектор .

3.29. В каноническом базисе пространства *R*3 оператор *А* действует по правилу . Найти собственные значения и собственные векторы оператора *А*.

**Решение**:

Матрица данного оператора в каноническом базисе имеет вид:

Находим собственные значения и собственные векторы матрицы оператора:

Для

Для

Получаем два собственных значения , которым соответствуют собственные вектора: .

3.30. Найти

**Решение**:

Находим собственные значения и собственные векторы матрицы оператора:

Для

Для

Отсюда получаем представление данной матрицы в виде

Тогда

=

3.31. Линейный оператор *А* в каноническом базисе пространства Р2 многочленов степени не выше 2 имеет матрицу . Найти собственные значения и собственные векторы оператора А. Является ли оператор оператором простого типа?

**Решение**:

Находим собственные значения и собственные векторы матрицы оператора:

Для

Получаем единственное собственное значение , которому соответствуют два собственных вектора: .

По определению, линейный оператор называется оператором простого типа (или простым оператором), если из собственных векторов этого оператора можно составить базис линейного пространства. Данный оператор имеет всего два собственных вектора, размерность пространства Р2 равна 3, следовательно, данный оператор не является оператором простого типа.

3.32. В пространстве Р2 многочленов степени не выше 2 оператор *А* действует по правилу . Найти его матрицу в каноническом базисе, собственные значения и собственные векторы. Является ли оператор оператором простого типа?

**Решение**:

Если , то

т.е. вектор переводится данным оператором в вектор .

Следовательно, матрица данного оператора в каноническом базисе имеет вид:

Находим собственные значения и собственные векторы матрицы:

Для

Получаем единственное собственное значение , которому соответствуют два собственных вектора: .

По определению, линейный оператор называется оператором простого типа (или простым оператором), если из собственных векторов этого оператора можно составить базис линейного пространства. Данный оператор имеет всего два собственных вектора, размерность пространства Р2 равна 3, следовательно, данный оператор не является оператором простого типа.

3.33. Оператор *А* действует на матрицы второго порядка по правилу , где . Показать, что *А* – линейный оператор на подпространстве симметрических матриц второго порядка, найти его собственные значения и собственные векторы.

**Решение**:

Условие некорректно: определение оператора фактически определяет для каждого вектора одно и то же значение , а такой оператор нелинеен.

3.34. Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора из задачи 3.22.

**Решение**:

Матрица линейного оператора из задачи 3.22 в базисе имеет вид:

Находим собственные значения и собственные векторы матрицы:

Для

Для

Для

Получаем три собственных вектора: .

3.35. Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора из задачи 3.23.

**Решение**:

Матрица линейного оператора из задачи 3.23 в базисе имеет вид:

Находим собственные значения и собственные векторы матрицы:

Для

Для

Для

Получаем три собственных вектора: .

3.36. Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора из задачи 3.24.

**Решение**:

Матрица линейного оператора из задачи 3.24 в базисе имеет вид:

Находим собственные значения и собственные векторы матрицы:

Для

Для

Т.е. собственному значению соответствуют два собственных вектора собственному значению - один собственный вектор .